Des questions et des Quizz à distance

Michel de Rougemont
Université Paris II & IRIF-CNRS

version 0.1 : 24.05.2020
version 0.2 : 10.06.2020, incluant les Quizz numériques

Résumé. L'enseignement et l'évaluation à distance posent de nouveaux problèmes. Je présente une comparaison des différentes plateformes de visioconférence et d'évaluation des cours. Je propose aussi de modifier les Quizz pour les adapter à la situation où tous les étudiants "collaborent" lors de l'examen.

Mots clés : Enseigner à distance, Tester à distance

Table des matières

1 Introduction

Comme mes collègues enseignants, je me trouve en période normale face à des étudiants, disposant d'un tableau et d'un écran lié à mon ordinateur. J'utilise principalement le tableau pour enseigner les concepts fondamentaux et l'écran pour illustrer ces concepts avec des logiciels et des pages Web complémentaires. Les questions des étudiants sont les bienvenues et sont en général un bon indicateur de la compréhension des élèves. L'examen associé au cours peut-être un projet ou un examen classique.

A partir du 17 Mars 2020, il a fallu s'adapter et trouver un environnement d'enseignement face à des étudiants virtuels, avec l'équivalent d'un tableau et d'un écran. La plupart des logiciels de visioconférence permettent cela, avec cependant d'importantes différences que je vais détailler. J'ai utilisé une plateforme BBB (*Big Blue Button*) après avoir envisagé Skype, Zoom et d'autres logiciels. La principale question a été de retrouver *l'interaction avec les étudiants*. S'est posée ensuite la question de l'évaluation. Le paradoxe de la nouvelle situation est que la communication entre l'enseignant et les élèves est devenue plus difficile lors des cours, alors que dans le même temps la communication entre élèves est devenue plus facile, en particulier lors d'une évaluation.

Les techniques informatiques peuvent s'adapter à cette nouvelle situation. Je décris comment retrouver une communication avec les étudiants lors des cours et comment imaginer des Quizz d'évaluation, sachant que tous les étudiants communiquent entre eux.

Les Quizz d'examen posent des questions intéressantes : comment peut-on utiliser un petit ensemble de questions de test, tout en générant de nombreux sujets différents, qui rendent la communication entre étudiants inefficace ? Je montre comment un test de 10 questions sur 10 thèmes peut se satisfaire d'une base de 20 questions avec 2 questions par thème. Nous allons générer plus de 10^9, soit 1 milliard, de sujets différents par de simples permutations. Nous allons ensuite introduire des variations dans les sujets pour les rendre *assez différents*, avec encore plus de possibilités. Ces sujets demanderont plus de temps de lecture et le temps de communication entre étudiants sera ainsi réduit.

Dans la section 2, je décris les plateformes de visioconférence, et dans la section 3 les plateformes de test, à partir d'une banque de questions. Dans la section 4, j'explore le domaine des *Quizz robustes*, et dans la section 5 j'aborde les questions d'équité, de vérification et de protection des données au sens du RGPD.

2 Des plateformes de visioconférence

Les logiciels de visioconférence présentent tous une vidéo des participants et une fenêtre de messages écrits. Avec les plateformes comme BBB ou Zoom, chaque étudiant peut intervenir s'il s'est connecté avec un microphone. Peu d'étudiants utilisent cependant cette méthode, alors qu'ils utilisent la fenêtre de dialogue.

Après quelques tâtonnements, j'ai découvert la fonction *sondages* de la plateforme BBB, qui me permet de poser une question (Oui/non ou choix multiples) : chaque étudiant répond et je reçois presque instantanément les réponses que je peux publier ou non sur la fenêtre par défaut de l'interface. C'est donc un Quizz oral que je soumets, soit improvisé, soit un peu préparé à l'avance. Cette fonctionnalité, que l'on n'utiliserait pas dans un cours présentiel, s'est révélée fondamentale. Elle rétablit une interaction avec les étudiants et elle stimule très souvent de nouvelles questions écrites.

Une utilisation possible du sondage est de vérifier en début de cours que les concepts principaux du cours précédent ont bien été acquis. De même pour les nouveaux concepts. Le Quizz de sondage est donc complémentaire de l'enseignement classique et peut aussi figurer sur la page Web du cours. [1]

Il existe deux types de plateformes : les plateformes externes associées à des serveurs gérés par des sociétés privées ou les plateformes internes associées à des serveurs gérés par l'Université ou un laboratoire. Un serveur est un PC physique, ou un PC dédié hébergé par un service ou directement sur le Cloud (Amazon Web services, MS Azure, OVH,....). Ce qui est crucial est la bande passante offerte sur l'Internet par le PC et la bonne gestion du serveur.

2.1 Plateformes externes

Le modèle économique de ces plateformes est d'offrir des services payants aux entreprises, avec une guarantie de service, de sécurité et de chiffrement. La version gratuite est dégradée et dans certains cas moins sûre. La situation ressemble à celle des années 1995 pour les navigateurs et les moteurs de recherche. Il faut s'imposer sur le marché par un effet de réseau et les gagnants sont en général des acteurs qui combinent une bonne technique informatique avec une bonne connaissance du marché et de son évolution.

1. Notons que les réunions de département pourraient aussi utiliser cette possibilité, quand il s'agit de voter, pour approuver le compte-rendu de la réunion précédente, la création d'un nouveau diplôme ou d'une nouvelle Université.

2.1.1 Zoom

Le nom du créateur de Zoom, Eric Yuan, va devenir aussi célèbre que ceux de M. Zuckerberg ou de B. Gates. Eric Yuan, né à Tai'an en Chine en 1970, arrive en Californie en 1997 et travaille pendant 20 ans pour Cisco. Il crée la société Webex en 2011, qui devient Zoom en 2014 avec ce slogan magique *zoom.us* qui est aussi le nom du site web. Le marché décolle vraiment en 2017, grâce en particulier aux consultations de télémédecine. La crise du Covid va amplifier le phénomène et la valorisation boursière s'envole.

Au départ, Zoom maitrise les réseaux Cisco et affine son logiciel pour partager des documents et un tableau. La plupart des séminaires américains utilisent Zoom, dans sa version gratuite, en particulier grâce à sa fonction d'archivage et de streaming sur Youtube.

La version gratuite avait au début une limitation de 40 minutes, mais qui a été vite levée. La sécurité de la version gratuite était aussi très faible et a créé ce qui s'appelle le *Zoom Bombing*[2], qui a lui aussi été corrigé.

Zoom a des serveurs en Chine, aux USA et en Europe, c'est son principal atout sur le marché mondial.

2.1.2 Skype et Teams

Skype est un des précurseurs de la visioconférence, né en 2003 en Estonie. C'est l'archétype d'un produit Européen très efficace, mais qui n'a trouvé son marché qu'aux USA. Skype est passé par Ebay et Comcast avant d'être racheté par Microsoft. Il y a une version gratuite et la version payante est *Skype for Business*.

On peut partager un écran avec Skype, bien que cela soit rarement utilisé. Cela reste un très bon outil de travail entre deux personnes, ou au sein d'un petit groupe. Le gouvernement chinois ne bloque pas Skype, bien qu'il bloque de nombreuses autres plateformes américaines.

Microsoft a lancé *Teams* en 2018 pour le marché de l'enseignement et du télétravail, pour pallier les limitations de Skype. Cette plateforme intègre la visioconférence au monde

2. Un utilisateur extérieur s'introduit dans une réunion Zoom avec pour simple but de la perturber. L'identifiant de la session n'était simplement pas protégé. Les adresses IP des participants pouvaient aussi être dévoilées.

Office en généralisant ses composants fluides, à l'origine des composants Microsoft. C'est sans-doute un des concurrents sérieux de Zoom.

2.1.3 Hangouts

C'est la plateforme de Google créée en 2016, sans grand succès reprenant *Google Messages*. En 2020, elle évolue vers *Google Meet*. Google n'est plus un acteur sur ce marché, à l'exception de l'archivage sur Youtube.

2.1.4 Glowbl

A première vue, cette entreprise lyonnaise suit un modèle similaire à celui de Zoom, comme des dizaines d'autres sociétés. La particularité est qu'elle n'a pas de page wikipedia et que son site web ne décrit aucun historique sur son développement, ce qui est particulièrement inédit dans ce milieu.

2.2 Plateformes internes

On télécharge un logiciel qu'on installe sur un serveur qui peut être sur le cloud. Il faut simplement avoir les droits d'administration et être aguerri aux attaques informatiques. Le plus souvent, c'est un logiciel Open Source.

2.2.1 BBB : *Big Blue Button*

Ce logiciel Open Source a été développé en 2009 à l'Université Carleton, au Canada. Il s'installe sur un serveur Linux, qui doit donc être géré séparément. Par exemple, la plateforme que j'utilise est accessible depuis :

https ://bbb1.math.univ-paris-diderot.fr/b/xxx-yyy-zzz

C'est le serveur bbb1, géré par l'Université Paris-Diderot et *xxx-yyy-zzz* remplace un code qui identifie un environnement unique. L'archivage est réalisé par le même serveur et non par Youtube. Comme la plupart des logiciels de visioconférence, chaque participant peut apparaitre en vidéo, partage un espace de dialogue et un écran par défaut. Lors d'un séminaire de recherche, la présentation .pdf du présentateur apparaît sur l'écran par défaut. Il y a cependant deux fonctions innovantes : le partage d'une fenêtre arbitraire de son environnement et la fonction sondage.

Partager des fenêtres. On peut vouloir partager une présentation Powerpoint (en .pdf), une page Web d'un navigateur, un interface de logiciel, une fenêtre d'un Terminal. L'écran par défaut est un tableau blanc dont l'interface est cependant rudimentaire. Si l'on maitrise un logiciel comme *Paint*, utilisé comme tableau blanc, il suffit de partager sa fenêtre Paint et les participants suivront alors ce tableau. Si l'on souhaite partager un éditeur Python ou VBA, le même principe s'applique.

Sondages. On peut démarrer un sondage auprès des participants, selon différents formats, à tout moment. Les réponses apparaissent presque simultanément sur l'écran du présentateur, qui peut les partager s'il le souhaite. Le résultat se trouve alors sur l'écran, par défaut. Cette fonctionnalité se révèle cruciale pour la pédagogie à distance. En posant les bonnes questions, les étudiants interagissent en posant d'autres questions dans l'espace de dialogue. C'est ce qui distingue ce type d'enseignement à distance d'un MOOC qui est statique.

2.2.2 Jitsi

C'est aussi un logiciel libre créé à l'Université de Strasbourg en 2011. Il permet les mêmes fonctionnalités que la version standard de visioconférence.

2.3 Applications à la recherche

Il est intéressant de comparer les usages de ces plateformes dans la recherche. Dans mon domaine de recherche (TCS : Theoretical Computer Science), les séminaires et conférences Européens utilisent BBB ou Zoom, les Américains et Asiatiques utilisent Zoom. L'archivage se trouve en général sur Youtube.

Ce qui a changé est que l'intervenant peut être à Singapour avec une audience répartie sur les 3 continents. Les séminaires sont devenus plus internationaux.

3 Des plateformes de Quizz

Une banque de questions possibles est construite dans un certain format et un serveur va ensuite produire un test à partir d'une sélection de questions, en suivant des règles de test. Le serveur peut être externe ou interne, mais le débit du serveur n'est plus central. Par contre la sécurité du serveur devient cruciale. Si le serveur est vulnérable, la banque de questions (et les réponses associées) seront sur le Web avant l'examen !

La génération du test consiste à traduire le fichier .xml en .html (en général HTML5), pour que les questions apparaissent correctement formatées pour les navigateurs classiques (Mozilla, Chrome, Edge, Safari,....) avec la feuille de style souhaitée. Il faut ensuite gérer le temps imparti au test, décider si l'on peut éditer les réponses aux questions et enfin fixer la notation finale. Il faut par exemple décider si une mauvaise réponse donne des points négatifs.

3.1 Serveur externe : Google Forms

La banque de questions se trouve dans un *Google drive*. Un test peut être généré à partir d'une URL, en s'identifiant par un mécanisme simple. L'application *Classroom* permet de gérer une banque de tests et les notes des étudiants.

Par exemple la question suivante :

Let $x^2 = 4$. A possible solution for x is :

(a) $\frac{1}{4}$

(b) -2 ✓

(c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(d) π

apparait dans un navigateur comme la figure 1.

Le code Latex doit passer par des images intermédiaires, en utilisant par exemple :
https ://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php

3.2 Serveur interne : Moodle

Ce logiciel est écrit en PHP (Hypertexte PreProcessor) et gère une Base de Données (PostgreSQL par exemple) pour constituer ce qu'on appelle un CMS (Content Management System). Il a été créé en Australie en 2002 et le développement s'est récemment accéléré. Il permet de gérer des cours, des étudiants et des tests. Le logiciel est Open Source, mais a besoin de plusieurs spécialistes pour le gérer correctement, dans un dédale de plugins, modules et autres interfaces complexes. Sans compter sur les innombrables *patchs de sécurité* qui doivent périodiquement être installés.

Les innombrables failles de sécurité de PHP rendent la récupération des données per-

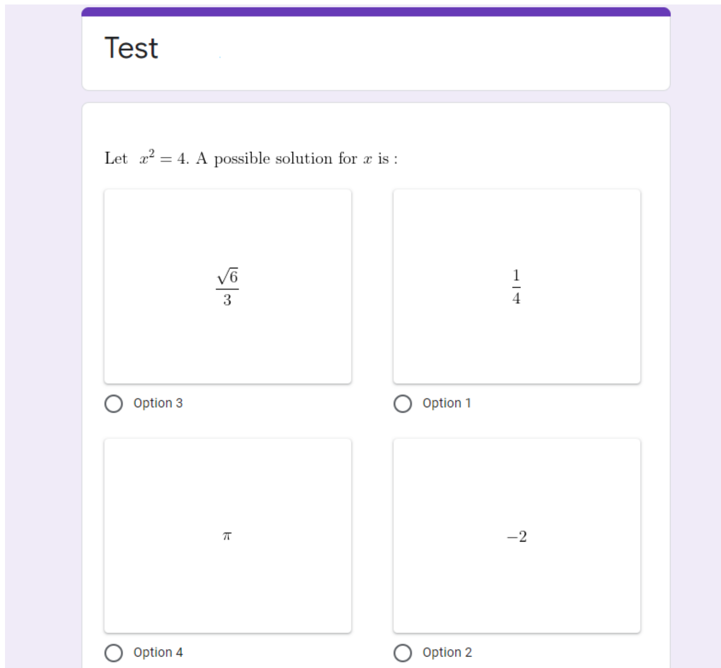

FIGURE 1 – Une représentation *Google forms* de la question

sonnelles et les banques de test [3] à risque. La conformité au RGPD est un argument de marketing, et la réalité est plus complexe.

Moodle essaie de tout faire : gérer les étudiants, les cours, les banques de test et les examens. Le niveau de sécurité requis est pourtant très différent. Les cours sont souvent disponibles pour tous, sur un site standard. La gestion des examens nécessite une sécurité plus importante.

3.2.1 Format des Quizz

Considérons le Quizz suivant réduit à une seule question. Un Quizz de 3 questions de forme différente est décrit dans l'appendice.

3. Ces liens de 2017 sont assez explicites,
https ://www.infoworld.com/article/3183684/flaws-in-moodle-cms-put-thousands-of-e-learning-websites-at-risk.html
http ://netanelrub.in/2017/03/20/moodle-remote-code-execution/
pointent sur les traditionnelles failles de PHP. En Mai 2020, la sécurité s'est sans-doute renforcée, mais PHP est réputé très vulnérable.

1. **Arithmetic**
   Let $x^2 = 4$. A possible solution for x is :
   (a) $\frac{1}{4}$
   (b) -2 ✓
   (c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
   (d) π

Ce Quizz est généré en Latex par le fichier :

```
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage{moodle}
\begin{document}
\begin{quiz}{}
\begin{multi}[points=3]{Arithmetic}
Let $x^2=4$. A possible solution for $x$ is:
\item $\frac{1}{4} $
\item* $-2$
\item $\frac{\sqrt{6}}{3}$
\item $\pi$
\end{multi}
\end{quiz}
\end{document}
```

Le package Moodle de Latex permet de générer un .pdf classique mais aussi un .xml ci-dessous, qui est le format de Moodle.

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<quiz>

<question type="category">
  <category>
    <text>$module$/</text>
  </category>
</question>
```

```
<question type="multichoice">
  <name>
    <text>Arithmetic</text>
  </name>
  <questiontext format="html">
    <text><![CDATA[<p>Let \(x^2=4\). A possible solution for \(x\) is: </p>]]></te
  </questiontext>
  <defaultgrade>3</defaultgrade>
  <generalfeedback format="html"><text/></generalfeedback>
  <penalty>0.1000000</penalty>
  <hidden>0</hidden>
  <single>true</single>
  <shuffleanswers>1</shuffleanswers>
  <answernumbering>abc</answernumbering>
  <answer fraction="0" format="html">
    <text><![CDATA[<p>\(\frac {1}{4} \)</p>]]></text>
  </answer>
  <answer fraction="100" format="html">
    <text><![CDATA[<p>\(-2\)</p>]]></text>
  </answer>
  <answer fraction="0" format="html">
    <text><![CDATA[<p>\(\frac {\sqrt {6}}{3}\)</p>]]></text>
  </answer>
  <answer fraction="0" format="html">
    <text><![CDATA[<p>\(\pi \)</p>]]></text>
  </answer>
</question>

</quiz>
```

3.2.2 Générer des Tests

Comme dans le cas des Google Forms, la question apparaît dans un navigateur avec une feuille de style particulière. Dans notre exemple, c'est la figure 2.
Le format .xml permet de gérer des formulaires, pour les transformer au format cible en incluant les règles du test, comme la limitation dans le temps et l'édition des réponses.
La gestion d'un examen pour des milliers d'élèves pose cependant le problème du *passage à l'échelle*, pour gérer les réponses et la notation finale.

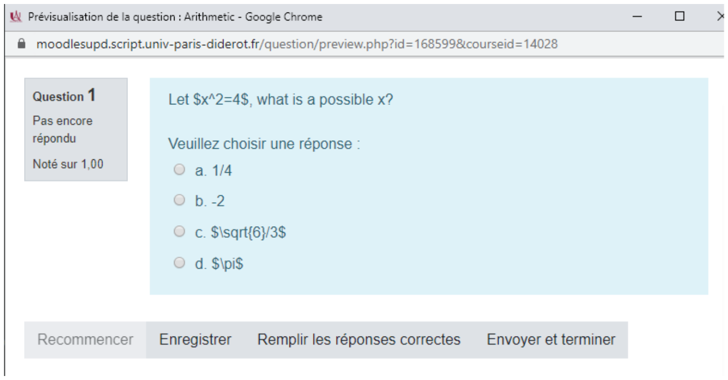

FIGURE 2 – Une représentation *Moodle* de la question

3.3 Autres techniques

On peut directement introduire les choix des questions en Latex à partir d'une banque de données dans le même format ou écrire un programme Python qui fera la sélection. La référence ci-dessous indique comment procéder.

https ://tex.stackexchange.com/questions/174872/generate-exam-from-a-question-bank

4 Robustesse des questions

Dans le contexte d'un *examen à distance*, comment bien concevoir sa banque de données pour limiter la fraude ? Aux U.S.A., on peut faire signer à chaque étudiant une charte qui stipule qu'il traitera le sujet d'examen seul sans aide extérieure. Dans les faits, 80% des étudiants suivront la charte. En France, c'est plutôt 2%. Les étudiants ont leur téléphone branché avec leur meilleur soutien, un ami ou un collègue, quelques fenêtres sur Facebook et Twitter avec leurs collègues proches et l'accès à toutes les ressources possibles. Lors d'un Quizz partiel en Avril 2020, l'expérience a montré que les étudiants photographiaient l'énoncé page par page, qui était immédiatement échangé au sein de leurs circuits courts, qu'ils répéraient les questions similaires entre différents énoncés et discutaient ensuite entre eux des meilleures réponses.

Il est donc important de minimiser leur travail collaboratif, en suivant plusieurs approches :

— générer des sujets différents à partir d'une banque limitée de sujets,

— augmenter la longueur des sujets en les diversifiant afin de minimiser le temps de communication,

— limiter le nombre de questions et le temps global du test.

Imaginons un Quizz de 10 questions, réparties sur 10 thèmes, avec une question par thème. Soit une banque de données de 20 questions, avec 2 questions par thème (question A et question B). Montrons comment générer des milliards de sujets différents avec deux techniques complémentaires : les *permutations* et les *variations*. On aurait plus de 10^9 possibilités pour chaque technique, soit plus de 10^{18} sujets différents en tout, qui se corrigeront automatiquement. Suivons l'exemple de la question ci-dessous.

1. **Arithmetic**
   Let $x^2 = 4$. A possible solution for x is :
   (a) $\frac{1}{4}$
   (b) -2 ✓
   (c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
   (d) π

4.1 Permutations

La possibilité la plus simple est de permuter l'ordre des réponses. Dans l'exemple ci-dessous, il y a 4 réponses possibles et donc $4! = 24$ possibilités. Une version possible serait :

Q1. Let $x^2 = 4$. A possible solution for x is :
(a) -2 ✓
(b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
(c) $\frac{1}{4}$
(d) π

Soit l'hypothèse d'un test de 10 questions parmi 20 possibles sur 10 sujets : il faut donc choisir chaque question au hasard (pile pour A et face pour B), soit $2^{10} = 1024 \simeq 10^3$ possibilités. On peut ensuite choisir une permutation aléatoire dans l'ordre des 10 thèmes, soit $10! \simeq 3.6 * 10^6$ nouvelles possibilités. Cette dernière fonctionnalité est de loin celle qui génère le plus de possibilités. En combinant ces 2 types de permutation, nous obtenons :

$$N_0 = 10^3 * 3.6 * 10^6 \simeq 3.6 * 10^9 \quad \text{possibilités}$$

On ne compte pas les permutations sur l'ordre des réponses, 24^{10} si toutes les questions ont 4 réponses. En effet, certaines questions ont peut-être seulement 2 réponses possibles, voire une seule dans les cas des réponses dites *numériques*. D'autre part, une simple permutation des réponses de modifie pas beaucoup la question.

Le logiciel Moodle peut réaliser ces tirages, mais qui cependant restent opaques[4]. Le principal problème de cette approche est que 2 étudiants ont en moyenne 5 questions en commun ! On a bien 10^9 sujets distincts mais ils sont tous proches. On n'a pas du tout supprimé le travail collaboratif. Il faut donc aller plus loin avec deux nouvelles techniques : *varier l'énoncé* et *varier les réponses*.

4.2 Varier l'énoncé

Si notre question test est acceptable pour un Quizz classique, elle ne l'est pas pour un Quizz à distance, car elle est beaucoup trop courte. Il faut que l'étudiant dépense du *temps de lecture* pour minimiser son *temps de communication*. On va donc introduire des phrases *neutres* que l'on peut placer dans n'importe quel ordre : cela augmentera la longueur du sujet et surtout le nombre de possibilités de sujets. Dans l'exemple ci-dessous, il y a 3 phrases neutres entre crochets, qui représentent le *sujet complet*, pour les variations d'énoncé.

Certains sites[5] de Quizz intègrent déjà l'idée de faire varier les constantes de l'énoncé.

> Q. [Polynomial equations of 1 variable are important.] [Let x be a variable.] Let $x^2 = 4$. [A solution is a value for x which satisfies the equation.] A possible solution for x is :
>
> (a) $\frac{1}{4}$
>
> (b) -2 ✓
>
> (c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
>
> (d) 3.14

On tire au hasard pour savoir si on insère chaque phrase neutre, en changeant peut-être aussi l'ordre des deux premières phrases neutres. Chaque sujet est écrit en italique, car il devient aléatoire. Cela génère 10 nouvelles possibilités pour l'énoncé de la question, parmi lesquelles :

4. Je ne sais pas comment faire des thèmes sur Moodle, mais c'est peut-être possible.
5. https ://www.kwyk.fr/exercices/mathematiques/2e/06-fonctions-de-reference/fonctions-affines/

— *Polynomial equations of* 1 *variable are important. Let* $x^2 = 4$. *A possible solution for* x *is :*

— *Let* x *be a variable. Polynomial equations of* 1 *variable are important. Let* $x^2 = 4$. *A solution is a value for* x *which satisfies the equation. A possible solution for* x *is :*

— et 8 autres possibilités.

Si chaque question a 10 variations possibles, on aura avec 10 questions $N = 10^{10}$ sujets différents.

4.3 Varier les réponses

Certains sites de Quizz proposent des réponses différentes, selon les utilisateurs. Je propose dans un premier temps de faire varier uniquement les réponses en privilégiant les réponses fractionnaires comme $\frac{1}{4}$ et -2, considéré comme $\frac{-2}{1}$. Chaque fraction $\frac{a}{b}$ est remplacée par :

$$\frac{a * r}{b * r}$$

pour un r aléatoire *indépendant*, par exemple $r \in_r \{4, 6, 8\}$ [6], après l'évaluation de $a * r$ et $b * r$. La variable est donc *neutre* dans la réponse. Le domaine des tirages peut varier pour chaque réponse. Un exemple de sujet complet serait :

> Q. [Polynomial equations of 1 variable are important.] [Let x be a variable.] Let $x^2 = 4$. [A solution is a value for x which satisfies the equation.] A possible solution for x is :
>
> (a) $\frac{1}{4}$ $[r \in_r \{4, 6, 8\}]$
>
> (b) -2 ✓ $[r \in_r \{4, 6, 8\}]$
>
> (c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ $[r \in_r \{4, 6, 8\}]$
>
> (d) 3.14 $[r \in_r \{2, 3, 4\}]$

Chaque réponse est une fraction (réponses (a), (b), (c), (d)) et donc quatre tirages $r_1, r_2, r_3 \in_r \{4, 6, 8\}$, $r_4 \in_r \{2, 3, 4\}$ sont réalisés. Supposons que $r_1 = 6, r_2 = 4, r_3 = 6, r_4 = 3$, parmi les $3^4 = 81$ possibilités. On aura alors le Quizz suivant, avec le 2-nd sujet aléatoire, complété par les tirages. :

6. La notation $x \in_r \{a, b, c, d, e\}$ indique que x est une valeur aléatoire *uniforme* prise sur le domaine {a,b,c,d,e}. Le symbole $\in_r$ où le r vient de *random* se lit *aléatoire uniforme*.

Q. *Let x be a variable. Polynomial equations of* 1 *variable are important. Let $x^2 = 4$. A solution is a value for x which satisfies the equation. A possible solution for x is :*

(a) $\frac{6}{24}$

(b) $\frac{-8}{4}$ ✓

(c) $\frac{6\sqrt{6}}{18}$

(d) $\frac{9.42}{3}$

Cette question semble très mal formulée. Et pourtant, elle est intéressante car elle est plus difficile à déchiffrer et poursuit donc le but recherché : diversifier les sujets et augmenter les temps de lecture. Côté dénombrement, le nombre de sujets différents est de $81 * 10 = 810$, pour la même question. Pour 10 questions de même type, le nombre N_1 de possibilités avec les seules techniques de variation, serait de :

$$N_1 = (810)^{10}$$

Notons que cette étape est de loin, celle qui permet la diversité la plus grande parmi les réponses. Nous avons pris modestement $r \in_r \{4, 6, 8\}$. Si $r \in_r \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, ce qui semble plus naturel, on aurait déjà 10^4 possibilités et si r est pris entre 1 et 100, on aurait 10^8 possibilités, pour 1 seule question.

4.3.1 Quizz de Sciences humaines et sociales.

La technique précédente est adaptée aux réponses numériques. Qu'en-est-il d'un Quizz avec des réponses non numériques ? La même technique est utilisée, en introduisant des phrases neutres dans la question et dans les réponses. Une question complète peut-être :

Q. [Le président des USA est élu tous les 4 ans.] [Le congrès et le président américain gouvernent ensemble.] Quel est le président des USA en décembre 1968 ? [Choisir un des noms de la liste ci-dessous.]

(a) [Un homme politique de grande expérience,] R. Nixon

(b) [Le sénateur du Texas,] L. Johnson

(c) [L'ancien président du sénat,] G. Ford

(d) [Un ancien acteur d'Hollywood,] R. Reagan

Deux réalisations possibles, en utilisant les permutations et les variations seraient :

Q7. *Le congrès et le président américain gouvernent ensemble. Quel est le président des USA en décembre 1968 ?*

(a) Un homme politique de grande expérience, R. Nixon

(b) L. Johnson

(c) L'ancien président du sénat, G. Ford

(d) Un ancien acteur d'Hollywood, R. Reagan

Q3. *Le président des USA est élu tous les 4 ans. Quel est le président des USA en décembre 1968 ? Choisir un des noms de la liste ci-dessous.*

(a) Le sénateur du Texas, L. Johnson

(b) G. Ford

(c) Un ancien acteur d'Hollywood, R. Reagan

(d) R. Nixon

4.4 Varier questions et réponses

On peut imaginer que l'équation $x^2 = 4$ soit remplacée par $x^2 = R$ par une valeur aléatoire de R parmi $\{4, 9, 16\}$ par exemple. On introduit donc une dépendance entre l'aléa de la question et les valeurs des réponses. Le sujet complet devient :

Q. [Polynomial equations of 1 variable are important.] [Let x be a variable.] Let $x^2 = R$. [A solution is a value for x which satisfies the equation.] A possible solution for x is : $[R \in_r \{4, 9, 16\}]$

(a) $\frac{1}{\sqrt{R}}$ $[r \in_r \{4, 6, 8\}]$

(b) $-\sqrt{R}$ ✓ $[r \in_r \{4, 6, 8\}]$

(c) $\frac{\sqrt{3*\sqrt{R}}}{3}$ $[r \in_r \{4, 6, 8\}]$

(d) 3.14 $[r \in_r \{2, 3, 4\}]$

Le tirage aléatoire est celui du sujet (avec ou sans phrases neutres), puis de $R \in_r \{4, 9, 16\}$, puis de $r_1, r_2, r_3 \in_r \{4, 6, 8\}$ et $r_4 \in_r \{2, 3, 4\}$. Le tirage de R modifie les réponses (a), (b) et (c). Deux sujets possibles intégreraient les deux variantes suivantes de la question, en utilisant les permutations et les variations.

Q2. *Let x be a variable. Polynomial equations of* 1 *variable are important. Let $x^2 = 4$. A solution is a value for x which satisfies the equation. A possible solution for x is :*

(a) $\frac{6}{24}$

(b) $\frac{-8}{4}$ ✓

(c) $\frac{6\sqrt{6}}{18}$

(d) $\frac{9.42}{3}$

C'est la question 2 du premier sujet qui correspond au 2-nd tirage du sujet, dans la section 4.2, et aux choix : $R = 4$, $r_1 = 6$, $r_2 = 4, r_3 = 6, r_4 = 3$.

Q9. *Polynomial equations of* 1 *variable are important. Let $x^2 = 9$. A possible solution for x is :*

(a) $\frac{12.56}{4}$

(b) $\frac{4}{12}$

(c) $\frac{8\sqrt{9}}{24}$

(d) $\frac{-18}{6}$ ✓

C'est la question 9 du second sujet qui correspond au 1-er tirage du sujet, dans la section 4.2 et aux choix : $R = 9$, $r_1 = 4$, $r_2 = 6, r_3 = 8, r_4 = 4$.

Ces deux questions ne partagent aucune réponse et il faut un certain temps de lecture pour s'aperçevoir que c'est la même question.

4.4.1 Réponses numériques.

Montrons comment généraliser ces questions à des Quizz numériques, c'est-à-dire quand une seule réponse numérique est attendue, sans choix proposés. Considérons le problème de l'intersection de deux droites en dimension deux.

Q. [Linear equations of 2 variables are important.] [Let x, y be variables.] Let $y = -2x + 40$ be the equation of the line L_1. Let $y = x + 10$ be the equation of the line L_2. What are the integer coordinates x_0, y_0 of the point at the intersection of L_1 and L_2 ?

(a) $x_0 =?$ [10 ✓]

(b) $y_0 =?$ [20 ✓]

Il serait beaucoup plus aisé d'avoir un générateur de droites arbitraires à coefficient entiers positifs ou négatifs, afin de générer des droites différentes pour chaque sujet. C'est ce que nous allons réaliser en suivant la procédure suivante :

1. Générer le point A d'intersection, de coordonnées x_0, y_0, uniformément sur le carré $\{1, 2, ...100\}^2$,
2. Générer L_1 avec une pente négative, uniformément $\{-1, -2, -3\}$, passant par A,
3. Générer L_2 avec une pente positive, uniformément $\{1, 2, -\}$, passant par A,
4. Publier les équations des droites L_1 et L_2 et demander x_0, y_0.

On tire uniformément $x_0, y_0 \in_r \{1, 2, ...100\}$. On tire ensuite la pente $a_1 \in_r \{-1, -2, -3\}$ de la droite L_1, la pente $a_2 \in_r \{1, 2, 3\}$ de la droite L_2. On peut alors trouver les equations des deux droites génériques :

$$L_1 : \quad y = a_1.x + b_1 \qquad \text{et } b_1 = y_0 - a_1.x_0$$

$$L_2 : \quad y = a_2.x + b_2 \qquad \text{et } b_2 = y_0 - a_2.x_0$$

Le sujet devient :

> Q. (Linear Algebra)
> $do : \quad x_0, y_0 \in_r \{1, 2, ...100\}$
> $do : \quad a_1 \in_r \{-1, -2, -3\}, a_2 \in_r \{1, 2, 3\}$
> $do : \quad b_1 = y_0 - a_1.x_0, b_2 = y_0 - a_2.x_0$
> $Let : \quad E_1 :'' y = a_1.x + b_1'', \quad E_2 :'' y = a_2.x + b_2''$
> [Linear equations of 2 variables are important.] [Let x, y be variables.] Let E_1 be the equation of the line L_1. Let E_2 be the equation of the line L_2. What are the integer coordinates x_0, y_0 of the point at the intersection of L_1 and L_2 ?
>
> (a) $x_0 =?$ $\quad [x_0 \ \checkmark]$
>
> (b) $y_0 =?$ $\quad [y_0 \ \checkmark]$

Considérons les tirages : $x_0 = 13, y_0 = 57, a_1 = -2, a_2 = 3$. On a $b_1 = 83, b_2 = -18$, $E_1 :'' y = -2.x + 83'', E_2 :'' y = 3.x + 18''$. Un sujet serait alors :

Q. (Linear Algebra)
Linear equations of 2 *variables are important. Let* $y = -2x + 83$ *be the equation of the line* L_1*. Let* $y = 3.x + 18$ *be the equation of the line* L_2*. What are the integer coordinates* x_0, y_0 *of the point at the intersection of* L_1 *and* L_2 *?*

(a) $x_0 =?$ [13 ✓]

(b) $y_0 =?$ [57 ✓]

Dans l'appendix, nous montrons comment généraliser cet exemple à la programmation linéaire et aux jeux à somme nulle.

4.5 Comparer deux sujets

Deux sujets ont en moyenne 5 questions en commun dans la banque de tests. Ce nombre est aléatoire, entre 0 et 10, en suivant une loi binomiale de moyenne 5. Deux étudiants chercheront à identifier le plus rapidement possible les questions en commun, pour pouvoir discuter de la meilleure réponse, bien que les réponses se présentent différemment.

Si chaque question apparaît sur une page du navigateur, il faudra échanger 10 photos ou copies d'écran, puis ensuite considérer $10 * 10 = 100$ possibilités pour trouver les quelques questions similaires. Il paraît assez peu probable de réaliser toutes les opérations nécessaires en moins de 5 minutes. Les réponses sont cependant toutes différentes : pour chaque élève, le nombre de questions à résoudre a augmenté !

Si le temps du test est de 20 minutes, soit 2 minutes par question, la stratégie de communication semble entraîner une perte de temps précieux, pour un gain très aléatoire.

5 Equité, Vérification et Protection des Données

Il y aura toujours un étudiant malveillant pour expliquer, avec preuve à l'appui, que sa version ancienne de Safari ne lit pas correctement les formulaires envoyés par le serveur de test, et que l'examen doit donc être annulé. Pour se prémunir de ce type d'argument, il suffit de demander aux participants lors de leur inscription sur le serveur de test, de confirmer qu'ils lisent bien un *test de référence*. Le test n'est envoyé qu'aux étudiants qui ont confirmé que leur environnement était compatible.

5.1 Equité

Dans un examen classique, les sujets sont *identiques*. Dans notre nouveau système, tous les sujets sont différents. Dans certains cas, ils sont très différents. Les cas extrêmes pour le sujet de la section 4.3.1 sont ci-dessous. Dans le 1er cas, toutes les 7 phrases neutres sont présentes (3 dans le sujet et 4 dans les réponses). Dans le 2-ème cas, toutes les phrases neutres son absentes.

> Q. *Le président des USA est élu tous les 4 ans. Le congrès et le président américain gouvernent ensemble. Quel est le président des USA en décembre 1968 ? Choisir un des noms de la liste ci-dessous.*
>
> (a) Un homme politique de grande expérience, R. Nixon
>
> (b) Le sénateur du Texas, L. Johnson
>
> (c) L'ancien président du sénat, G. Ford
>
> (d) Un ancien acteur d'Hollywood, R. Reagan
>
> Q. *Quel est le président des USA en décembre 1968 ?*
>
> (a) R. Nixon
>
> (b) L. Johnson
>
> (c) G. Ford
>
> (d) R. Reagan

Ces deux versions semblent inéquitables, du point de vue du temps de lecture. On va donc les éliminer. Il est naturel d'introduire la *signature* du test comme un mot binaire σ qui indique si la i-ème phrase neutre est présente ou pas : $\sigma(i) = 1$ si la i-ème phrase neutre est présente, sinon $\sigma(i) = 0$.

Pour la version 1 du sujet, $\sigma_1 = 1111111$ et pour la version 2, $\sigma_2 = 0000000$. La distance de Hamming entre ces mots binaires, mesure le pourcentage de différences, ici 100% et définit ainsi une *distance entre documents*. Le poids de Hamming est le nombre de 1, une variable aléatoire de loi binomiale de moyenne 3.5. On peut considérer que des documents sont *équitables* s'ils sont de poids proche, car le temps de lecture sera similaire.

Dans cet exemple, on peut se restreindre aux poids $2, 3, 4, 5$ et éliminer les poids $0, 1, 6, 7$ et donc éliminer les deux sujets ci-dessus. Il suffit de refaire un tirage[7] dans le cas où le poids est $0, 1, 6, 7$. Notons Δ l'écart à la moyenne 3.5, c'est-à-dire $-1.5, -0.5, +0.5, +1.5$

7. Cette technique s'appelle *Rejection Sampling*.

pour les valeurs $2, 3, 4, 5$.

Pour un test de 10 questions, on fera la moyenne globale, $\Delta = \sum_i \Delta(i)/10$, qui va donc se concentrer. Si chaque question comporte 7 phrases neutres, on peut alors ne garder que les Δ de poids $3, 4$. Tous les sujets seront alors à distance de Hamming moyenne de 1 et donc équitables. Si un sujet a Δ différent de 3 ou 4, on refait un tirage.

5.2 Vérification d'un test

Une des caractéristiques d'un examen classique est de pouvoir contester sa copie. Nous pouvons faire de même comme suit. L'algorithme qui produit le sujet fait essentiellement des tirages : les permutations, puis les variations. Le code informatique associé à cet algorithme devrait être public, pour bien expliquer la méthode et la défendre en cas de recours qui ne manqueront pas.

Nous allons stocker ces tirages pour chaque étudiant, de manière à pouvoir retrouver le sujet d'un étudiant. Nous gardons les permutations, composées de :

- Une permutation de $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ qui définit les 10 thèmes ordonnés. Par exemple la liste $[4, 9, 0, 7, 1, 3, 2, 5, 6, 8]$
- Un mot binaire de longueur 10 pour savoir si nous prenons la question A ou la question B pour chaque thème. Par exemple, $[0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$.
- L'ordre des réponses pour chaque question. Par exemple (a, c, d, b) pour le question 1 et ainsi de suite pour les 10 questions. La permutation (c, d, b, a) est celle de la question 10, en supposant toujours 4 réponses possibles.

La signature des permutations est la combinaison de ces listes, par exemple :

$$[[4, 9, 0, 7, 1, 3, 2, 5, 6, 8], [0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1], [(a, c, d, b), ..., (c, d, b, a)]]$$

De manière similaire, on définit la signature des variations, avec le mot σ_i qui décrit la signature du sujet de la question i et toutes les valeurs aléatoires μ_i qui sont utilisées dans la question i. On obtient ainsi :

$$[(\sigma_1, \mu_1), (\sigma_2, \mu_2), ..., (\sigma_{10}, \mu_{10}),]$$

La connaissance de ces 2 listes permet de générer le sujet global à l'identique. Cela permet d'expliquer à un étudiant quelles étaient les mauvaises réponses, s'il veut consulter sa copie. Cela servira aussi de *preuve*, en cas de recours.

5.3 Protection des données : RGPD

Rappelons que le *Règlement Général pour la Protection des Données* fixe un cadre européen pour sensibiliser les plateformes à la protection des données personnelles. Une des nombreuses dispositions est la possibilité pour un usager de récupérer *ses données personnelles* et de demander à la plateforme de les supprimer.

Si l'on garde les sujets, comme indiqué dans le section précédente, on pourra lui communiquer *ses données* qui incluent les sujets d'examen, puis les supprimer de la base de données.

Un logiciel installé sur un serveur va prétendre respecter le RGPD. Comment peut-on s'en convaincre ?

5.3.1 Analyse d'impact

L'analyse d'impact est déclarative et permet de sensibiliser le DPO (Data Protection Officer) sur les différentes faiblesses de son système d'Information. Dans le cas de Moodle, le rapport mensuel mentionnera sans doute les derniers patchs de sécurité qui ont été installés pour protéger le serveur Apache. Est-ce convaincant ?

Le langage PHP reste très vulnérable et de nouvelles failles de sécurité apparaîtront. D'autre part, la concentration des données sensibles, comme les notes des étudiants sur un seul serveur est *très risquée*. Si le site Agor@assas prétend respecter le RGPD, comment peut-on vraiment s'en assurer ? La question se pose à toutes les plateformes.

5.3.2 Comment vérifier qu'une plateforme suit le RGPD ?

L'analyse d'impact est déclarative et l'un des problèmes de recherche est d'imaginer des algorithmes qui mesurent automatiquement le degré de conformité au RGPD des plateformes. Cela permettrait d'avoir des indicateurs publics à grande échelle, qui seraient mis à jour périodiquement. La technique des Quizz robustes, introduite dans la section 4, peut se généraliser pour remplir ce rôle, et donc vérifier l'état d'une plateforme.

Prenons l'exemple de Facebook : un usager souhaite fermer son compte et demande la récupération de ses données et leur suppression. La plateforme va lui envoyer un fichier .xml qui inclut les posts récents de l'usager. Cela comprend-il toutes les données ? Les données ont-elles été effacées ?

Une technique possible pour vérifier ces deux points essentiels est de créer des comptes *neutres* qui génèrent des *posts* et des liens (likes, réponses,.....) entre eux, selon une technique qui généralise les phrases neutres dans un contexte dynamique. Les phrases neutres sont générées par plusieurs acteurs qui collaborent, à l'aide d'un algorithme de génération, qui enregistre l'historique de toutes les actions. Imaginons deux comptes u_1 et u_2 selon ce schéma.

Après de nombreuses interactions générées par l'algorithme sur une période de temps, *l'algorithme de vérification* annule le compte u_1 et récupère l'historique envoyé par Facebook. Il compare alors :

— son historique de u_1 avec le fichier .xml envoyé par Facebook,

— la présence des posts de u_1, vus du point de vue de u_2 qui reste actif.

Suite à cette expérience, on s'aperçoit que Facebook renvoie bien les post récents de u_1 mais que certains posts de u_1 sont toujours observables par u_2. L'effacement est en fait une procédure difficile à définir quand il s'agit d'un graphe. Si l'on demande d'effacer le noeud d'un graphe, que se passe-t-il avec les arêtes adjacentes à ce noeud ? Plusieurs définitions sont possibles et Facebook a adopté une stratégie particulière d'effacement.

Les phrases neutres et leur utilisation selon des stratégies bien précises, comme le montre l'exemple précédent, sont des éléments clés pour la *protection vérifiable* des données.

6 Conclusion

Les nouvelles conditions d'enseignement et de test nous poussent à imaginer de nouveaux cadres. La situation de l'enseignement à distance est plus simple à imaginer. Le test à distance à grande échelle quand tous les étudiants peuvent communiquer entre eux et plus difficile à concevoir. J'ai présenté quelques pistes pour rendre cette tâche imaginable grâce à des *algorithmes probabilistes* qui rendent les tests robustes à la collaboration. Ces techniques se généralisent pour rendre la protection des données *vérifiable.*

A Exemple Moodle

Il existe une très grande variété de questions possibles. Le Quizz ci-dessous génère 3 questions différentes, à partir du code Latex.

Quizz 1

1. **Basic addition**
   What is $8+3$?
   — 11 ✓
2. **Newton's name**
   What was Newton's first name ?
   — Isaac ✓
   — Fig (0%)
   — Sir (0%)
3. **A first derivative**
   What is the first derivative of x^3 ?
   (a) $\frac{1}{4}x^4 + C$
   (b) $3x^2$ ✓
   (c) 51

Le code Latex est :

```
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage{moodle}
\begin{document}

\begin{quiz}{Quizz 1}
\begin{numerical}[points=2]{Basic addition}
What is $8+3$?
\item 11
\end{numerical}
\begin{shortanswer}[case sensitive=true]{Newton's name}
What was Newton's first name?
\item Isaac
\item[fraction=0, feedback={No, silly!}] Fig
\item[fraction=0] Sir
```

```
\end{shortanswer}
\begin{multi}[points=3]{A first derivative}
What is the first derivative of $x^3$?
\item $\frac{1}{4} x^4+C$
\item* $3x^2$
\item $51$
\end{multi}
\end{quiz}
\end{document}
```

Le code .xml est :

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<quiz>

<question type="category">
  <category>
    <text>$module$/Quizz 1</text>
  </category>
</question>

<question type="numerical">
  <name>
    <text>Basic addition</text>
  </name>
  <questiontext format="html">
    <text><![CDATA[<p>What is \(8+3\)? </p>]]></text>
  </questiontext>
  <defaultgrade>2</defaultgrade>
  <generalfeedback format="html"><text/></generalfeedback>
  <penalty>0.1000000</penalty>
  <hidden>0</hidden>
  <answer fraction="100" format="plain_text">
    <text>11</text>
    <tolerance>0</tolerance>
  </answer>
</question>
<question type="shortanswer">
```

```
  <name>
    <text>Newton\OT1\textquoteright s name</text>
  </name>
  <questiontext format="html">
    <text><![CDATA[<p>What was Newton\OT1\textquoteright s first name? </p>]]></te
  </questiontext>
  <defaultgrade>1.0</defaultgrade>
  <generalfeedback format="html"><text/></generalfeedback>
  <penalty>0.1000000</penalty>
  <hidden>0</hidden>
  <usecase>1</usecase>
  <answer fraction="100" format="plain_text">
    <text>Isaac </text>
  </answer>
  <answer fraction="0" format="plain_text">
    <text> Fig </text>
    <feedback format="html"><text><![CDATA[<p>No, silly!</p>]]></text></feedback>
  </answer>
  <answer fraction="100" format="plain_text">
    <text>{fraction=0} Sir</text>
  </answer>
</question>
<question type="multichoice">
  <name>
    <text>A first derivative</text>
  </name>
  <questiontext format="html">
    <text><![CDATA[<p>What is the first derivative of \(x^3\)? </p>]]></text>
  </questiontext>
  <defaultgrade>3</defaultgrade>
  <generalfeedback format="html"><text/></generalfeedback>
  <penalty>0.1000000</penalty>
  <hidden>0</hidden>
  <single>true</single>
  <shuffleanswers>1</shuffleanswers>
  <answernumbering>abc</answernumbering>
  <answer fraction="0" format="html">
    <text><![CDATA[<p>\(\frac {1}{4} x^4+C\)</p>]]></text>
```

```
  </answer>
  <answer fraction="100" format="html">
    <text><![CDATA[<p>\(3x^2\)</p>]]></text>
  </answer>
  <answer fraction="0" format="html">
    <text><![CDATA[<p>\(51\)</p>]]></text>
  </answer>
</question>

</quiz>
```

B Quizz numériques

B.1 Programmation linéaire

Rappelons que l'on souhaite générer des contraintes linéaires, comme les équations des droites $L1$ et L_2 de la section 4.4.1, puis un polytope et enfin une nouvelle fonction linéaire à Maximiser. La forme standard d'une programme linéaire est :

$$Max \;\; c^t \cdot x$$

$$A \cdot x \leq b$$

où x est un vecteur de dimension n, le vecteur des variables $x_1, ..., x_n$, c est un vecteur de constantes de dimension n, b est un vecteur de constantes de dimension m et A est une matrice (m, n), m lignes et n colonnes.

Considérons $n = 2$ et les variables x, y. Le polytope associé aux contraintes est défini par les axes ($x = 0$ et $y = 0$) et les deux droites L_1 et L_2 de la section 4.4.1 qui se coupent au point A. Soit L la droite $c^t \cdot x$ qui passe par A. Si la droite L se trouve à l'extérieur du polytope, de pente négative, un raisonnement géométrique montre que A détermine l'optimum de $c^t \cdot x$. Il suffit de prendre la pente de L uniformément sur $\{-4, -5, -6\}$ et l'optimum sera la valeur de $c^t \cdot x$ sur (x_0, y_0), les coordonnées de A. La procédure est donc :

1. Générer le point A d'intersection, de coordonnées x_0, y_0, uniformément sur le carré $\{1, 2, ...100\}^2$,
2. Générer L_1 avec une pente négative a_1, uniformément $\{-1, -2, -3\}$, passant par A,

3. Générer L_2 avec une pente positive a_2, uniformément $\{1, 2, 3\}$, passant par A,
4. Générer L avec une pente négative a uniformément sur $\{-4, -5, -6\}$, qui détermine le vecteur c,
5. Les contraintes sont les inéquations associées à L_1 et L_2 , $x \geq 0$ et $y \geq 0$
6. demander $c^t \cdot x(x_0, y_0)$.

Soit $b_1 = y_0 - a_1.x_0, b_2 = y_0 - a_2.x_0$. Le programme linéaire s'écrit :

$$\begin{gathered} Max \quad -ax + y \\ -a_1.x + y \leq b_1 \\ a_2.x - y \leq -b_2 \\ -x \leq 0 \\ -y \leq 0 \end{gathered}$$

La question générale s'écrit :

> Q. (Linear Programming)
> $do: \quad x_0, y_0 \in_r \{1, 2, ...100\}$
> $do: \quad a_1 \in_r \{-1, -2, -3\}, a_2 \in_r \{1, 2, 3\}, a \in_r \{-4, -5, -6\}$
> $do: \quad b_1 = y_0 - a_1.x_0, b_2 = y_0 - a_2.x_0$
> $Let: \quad E_1 :'' -a_1.x + y \leq b_1'', E_2 :'' a_2.x - y \leq -b_2''$
> $Let: \quad E :'' -a.x + y''$
> [Linear constraints on 2 variables are important.] [Let x, y be variables.] Let E_1 be the first constraint. Let $E2$ be the second constraint. Let $x \geq 0$ and $y \geq 0$ two additional constraints. We want to maximize E for x, y which satisfy the constraints. What is the maximum value ?
>
> (a) $Max =?$ $\quad [-a.x + y(x_0, y_0) \ \checkmark]$

Considérons les tirages : $x_0 = 13, y_0 = 57, a_1 = -2, a_2 = 3, a = -5$. On a $b_1 = 83, b_2 = -18$, $E_1 :'' y = -2.x + 83'', E_2 :'' y = 3.x + 18''$. Le sujet serait :

> Q. (Linear Algebra)
> *Linear constraints of* 2 *variables are important. Let* $2x + y \leq +83$ *be the first constraint . Let* $3x - y \leq -18$ *be the second constraint. Let* $x \geq 0$ *and* $y \geq 0$ *two additional constraints. We want to maximize* $5x + y$ *for* x, y *which satisfy the constraints. What is the maximum value ?*
>
> (a) $Max =?$ $\quad [122 \ \checkmark]$

B.2 Jeux à somme nulle